



TITLE:

債務者間ネットワークの構造が与信ポートフォリオの損失分布に及ぼす影響について (ファイナンスの数理解析とその応用)

AUTHOR(S):

朴, 晃一

CITATION:

朴, 晃一. 債務者間ネットワークの構造が与信ポートフォリオの損失分布に及ぼす影響について (ファイナンスの数理解析とその応用). 数理解析研究所講究録 2011, 1736: 131-146

ISSUE DATE:

2011-04

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/170816>

RIGHT:

債務者間ネットワークの構造が与信ポートフォリオの損失分布に及ぼす影響について

大阪大学・経済学研究科 朴 晃一 (Park Hwang-Il)

Graduate School of Economics

Osaka University

第 1 節 はじめに

貸付債権の信用リスクを評価するとき、期待損失額以上の損失の評価が重要となるので、将来の損失額の分布を正確に把握する必要がある。複数の貸付からなる与信ポートフォリオの信用リスクを評価する際には、債務者間の共倒れリスクの大小により将来の損失分布の形状が変わるので、債務者間のデフォルト相関の影響を適切に組み込む必要がある。現在、世界規模での経済の高度化に付随して経済主体間の依存関係が強くなっている。その結果として企業への貸付や債券の信用リスクが連鎖的に悪化する事例も増えつつある。このように債務者間のデフォルト相関の適切な評価は今日的な課題でもある。

デフォルト相関を組み入れた信用リスク推定モデルには主に 2 つの流れがある。1 つは各債務者を業種や企業規模などのセクターに分類し、所属セクターに共通して作用するデフォルト要因と各債務者固有のデフォルト要因によって、デフォルトが発生すると考えるモデルで、当モデルで代表的なのがコピュラ関数を用いたファクター・モデルである。もう 1 つは個々の債務者間の依存関係に着目して、信用リスクの伝播構造を記述するモデルで、デフォルト感染モデルがその代表格となる。本研究では、後者のデフォルト感染モデルに関する研究を行う。

デフォルト感染モデルの嚆矢となる Davis, and Lo (2001) では、債務者のデフォルトは自然発生的なデフォルト（直接デフォルト）と共倒れデフォルト（感染デフォルト）の 2 種類に限定されると仮定し、連鎖倒産の構造を明示的にモデル化した。この研究により、相関行列でデフォルト相関を記述するファクター・モデルでは表現できなかった非対称的なデフォルト相関を表現することが可能になった。Rullière, and Dorobantu (2009) はこのモデルを他期間モデルに拡張し、デフォルト感染の時間的な推移を明らかにした。しかし、これらのモデルにおける直接デフォルトや感染デフォルトの確率は推定することが困難である、という欠点がある。また、債務者の将来の状態を生存かデフォルトの 2 つに限定しており、将来の取り得る状態は二項分布に従うと仮定しているので、債務者数が多くなると組合わせ数が膨大になってしまう。

デフォルト感染を組み込む別の方法として、Egloff, Leippold, and Vanini (2004, 2007) は、ファクター・モデルにおける各債務者固有のデフォルト要因に信用伝播の影響を組み入れることで、非対称的なデフォルト相関も表現できるファクター・モデルを提案した。このモデルでは将来の信用力変化を信用格付情報で推定しているので、デフォルトにまで至らない信用力変化が表現できるだけでなく、格付情報という比較的公正な指標でデフォルト確率を推定することができる。また、二項分布を仮定しなくてもよいので膨大な組合わせ計算をする必要もない。Rösch, and

Winterfeldt (2007) は同じくファクター・モデルの枠組みの下で、債務者をデフォルト感染の感染源企業と感染先企業に分類して、両者の比率で感染デフォルトの確率を表現するモデルを提案した。

ファクター・モデルにデフォルト感染を組み込むモデルでは、セクター由来のデフォルト相関をマクロ構造のデフォルト相関と定義し、一方、個々の債務者間のデフォルト相関をマイクロ構造のデフォルト相関と定義している。マイクロ構造は債務者間のビジネス上の依存関係を表すネットワークで記述される。これまでの研究では、数種類のネットワーク構造と損失分布を比較する研究はあったが、ネットワーク構造の特性（エッジの重みやネットワーク密度など）と損失分布との関係については述べられていない。本研究では債務者間ネットワークの構造的特徴を示す指標として信用集中度という指標を導入し、この指標を通じて債務者間ネットワークの構造と損失分布との関係を明らかにする。

次節以降の本稿の構成は以下の通りである。第2節では、マクロ構造のデフォルト相関のみを考慮したファクター・モデル、およびマイクロ構造のデフォルト相関も組み込んだファクター・モデルの詳細を述べる。第3節では、本稿において提案する信用集中度の定義から始め、信用集中度とポートフォリオの損失分布の関係を考察する。

第2節 モデル

第2節では本研究の土台となる Egloff, Leippold, and Vanini (2004, 2007) モデルについて詳述する。まずは与信ポートフォリオの損失分布を推定する基本モデルであるマートン型のファクター・モデルの詳細を記す。次にマートン型のファクター・モデルの拡張版である Egloff, Leippold, and Vanini (2004, 2007) モデルについて詳述した後、本邦の実在の企業グループに擬したサンプル・ポートフォリオを用いて両モデルの比較を行う。

2.1 マートン型のファクター・モデル

与信ポートフォリオを構成する N 人の債務者にはそれぞれアセット・リターン $A_i \sim N(0, 1)$ が割り振られており、これが閾値 θ を超過した際に債務者 i の信用状態が変化すると仮定する。

債務者 i , $i = 1, \dots, N$ は K 個のセクターに分類されるとする。各債務者をそれぞれのセクターに分類する関数を $S: \{1, \dots, N\} \rightarrow \{1, \dots, K\}$ と定義する。アセット・リターン $A = (A_i)_{i=1, \dots, N}$ が次の2種の確率的に変動するファクターによって決まるモデルを考える。

①あるセクター内の全債務者に対して共通に作用するファクター

$$Z = (Z_S)_{S=1, \dots, K} \sim N(0, \Lambda), \quad \Lambda = (\lambda_{g,h})_{g,h=1, \dots, K}$$

②各債務者に固有のファクター

$$\epsilon = (\epsilon_i)_{i=1, \dots, N} \sim N(0, 1_N).$$

Z は相関行列 Λ の多変量正規分布に従い、 ϵ は互いに独立な多変量標準正規分布に従うとする。 Z と ϵ は無相関と仮定する。 A_i は $q_{S(i)}$, $i = 1, \dots, N$ ($0 \leq q_i \leq 1$) を用いて以下のように表わされる。

$$A_i = \sqrt{q_{S(i)}}Z_{S(i)} + \sqrt{1 - q_{S(i)}}\epsilon_i \sim N(0,1). \quad (2.1.1)$$

(2.1.1) において、 $q_{S(i)}$ は債務者 i のセクターレベルのファクター $Z_{S(i)}$ に対する感応度である。これはセクター全体に及ぶ影響の受けやすさの指標である。いま $\rho = (q_{S(i)})_{i=1,\dots,N}$, $V = (Z_{S(i)})_{i=1,\dots,N}$ とすると、(2.1.1) はベクトル形式で次のように書き換えることができる。

$$A = D(\sqrt{\rho})V + D(\sqrt{1 - \rho})\epsilon \sim N(0, 1_N). \quad (2.1.2).$$

$D(C)$ はベクトル C からなる対角行列である (Egloff, Leippold, and Vanini (2004, 2007)).

2.2 パラメータの推定

マクロ構造のデフォルト相関に対する感応度 q , 及びセクター間の相関係数 λ は、セクター別デフォルト率のヒストリカル・データから推定を行い求める。本研究では Moody's Investors Service から得た 1970 年から 2008 年までの産業セクター別の年間デフォルト率データを用いた。

(A) マクロ構造のデフォルト相関に対する感応度 q

ある産業セクター S を代表する債務者がいて、この債務者のセクター S に対する感応度を q_S とし、セクター S に所属している各債務者の感応度は同一である、と仮定する。 q_S はセクターを代表する債務者のアセット・リターン A_S が、当該セクターの平均的なデフォルト率から求まる閾値 θ_S を超過する時の値として求まる。

(2.1.1) より、 A_S は

$$A_S = \sqrt{q_S}Z_S + \sqrt{1 - q_S}\epsilon, \quad Z_S, \epsilon \sim N(0,1) \text{ i.i.d.} \quad (2.2.1)$$

と表される。 A_S が θ_S 以下になった時にセクターを代表する債務者はデフォルトすると仮定する。ここで、 $\chi_S = \mathbb{1}_{\{A_S \leq \theta_S\}}$ とし、セクター S の平均的なデフォルト率の実証データを \hat{m}_S とすると、

$$E[\chi_S | Z = Z_S] = \Phi(\theta_S) \equiv \hat{m}_S. \quad (2.2.2)$$

が得られる。なお、 Φ は標準正規分布の累積分布関数である。

ある債務者のセクター S に所属している、という条件の下でのデフォルト確率は、

$$\begin{aligned} E[\chi_S | Z = Z_S] &= P\{A_S \leq \theta_S | Z = Z_S\} = P\{\sqrt{q_S}Z_S + \sqrt{1 - q_S}\epsilon \leq \theta_S\} \\ &= P\left\{\epsilon \leq \frac{\theta_S - \sqrt{q_S}Z_S}{\sqrt{1 - q_S}}\right\} = \Phi\left(\frac{\theta_S - \sqrt{q_S}Z_S}{\sqrt{1 - q_S}}\right). \\ \theta_S &= \Phi^{-1}(\hat{m}_S), \quad Z_S \sim N(0,1). \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

でも与えられる。いま、ヒストリカル・データから推定されるセクターS の年次デフォルト率の分散を σ_S^2 とすれば、以下の関係式が得られる。

$$\text{Var}(E[\chi_S|Z = Z_S]) = E \left[\Phi \left(\frac{\theta_S - \sqrt{q_S} Z_S}{\sqrt{1 - q_S}} \right)^2 \right] - E \left[\Phi \left(\frac{\theta_S - \sqrt{q_S} Z_S}{\sqrt{1 - q_S}} \right) \right]^2 \equiv \sigma_S^2. \quad (2.2.4)$$

(2.2.2) ～ (2.2.4) から q_S は非線形方程式を数値的に解けば一意に求まる。結果は以下の通り。

	各セクター平均デフォルト率	同デフォルト閾値	同デフォルトの標準偏差	同感応度(RHO)
銀行	0.3157%	-2.7310	0.6872%	0.2256
資本財	1.4890%	-2.1730	1.5338%	0.1247
消費財	1.8220%	-2.0920	1.8571%	0.1306
エネルギー環境	1.2221%	-2.2501	1.7104%	0.1853
不動産 保険 金融	0.8539%	-2.3850	3.2070%	0.5145
放送・出版 メディア関連	2.0331%	-2.0470	2.4757%	0.1781
小売・卸売など流通	2.1865%	-2.0167	2.3581%	0.1516
政府関連企業	0.3844%	-2.6655	1.9403%	0.5268
ハイテク産業	1.1751%	-2.2652	1.7790%	0.2036
運輸	2.2126%	-2.0117	3.0395%	0.2187
社会インフラ	0.1646%	-2.9391	0.2574%	0.1373

表 2.2.1 産業セクターに対する感応度 q_S

(B) セクター間の相関係数 λ

セクター間の相関係数を求めるにあたって、これまでと同様に各セクターを代表する債務者が存在すると仮定する。2 つのセクター S_1 と S_2 を代表する債務者のデフォルト確率はこれまでと同様に、それぞれ

$$E[\chi_{S_1}|Z = Z_{S_1}], \quad E[\chi_{S_2}|Z = Z_{S_2}]$$

これらデフォルト確率の共分散は

$$\begin{aligned} & E \left[E[\chi_{S_1}|Z = Z_{S_1}] E[\chi_{S_2}|Z = Z_{S_2}] \right] \\ &= \text{Cor}(E[\chi_{S_1}|Z_{S_1}], E[\chi_{S_2}|Z_{S_2}]) \cdot \sigma(E[\chi_{S_1}|Z_{S_1}]) \cdot \sigma(E[\chi_{S_2}|Z_{S_2}]) \\ & \quad + E[\chi_{S_1}|Z_{S_1}] \cdot E[\chi_{S_2}|Z_{S_2}]. \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

となる。このとき、ヒストリカル・データから推定されるセクター S_1 と S_2 の年次デフォルト率の相関係数を $\hat{r}_{S_1 S_2}$ とすると、

$$\text{Cor}(E[\chi_{S_1}|Z_{S_1}], E[\chi_{S_2}|Z_{S_2}]) = \hat{r}_{S_1 S_2}. \quad (2.2.6)$$

(2.2.2), (2.2.4), (2.2.6) より, (2.2.5) は

$$E[E[\chi_{S_1}|Z=Z_{S_1}]E[\chi_{S_2}|Z=Z_{S_2}]] = \hat{r}_{S_1S_2} \cdot \hat{\sigma}_{S_1} \cdot \hat{\sigma}_{S_2} + \hat{m}_{S_1} \cdot \hat{m}_{S_2}. \quad (2.2.7)$$

一方, デフォルト確率の共分散は

$$\begin{aligned} E[E[\chi_{S_1}|Z=Z_{S_1}]E[\chi_{S_2}|Z=Z_{S_2}]] &= E[P\{A_{S_1} \leq \theta_{S_1}|Z_{S_1}\}P\{A_{S_2} \leq \theta_{S_2}|Z_{S_2}\}] \\ &= P\{A_{S_1} \leq \theta_{S_1} \wedge A_{S_2} \leq \theta_{S_2}\}. \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

A_{S_1} と A_{S_2} は相関行列 $R = \begin{pmatrix} 1 & r_{S_1S_2} \\ r_{S_1S_2} & 1 \end{pmatrix}$ をもつ 2 変量標準正規分布に従うので, (2.2.8) より

$$\begin{aligned} P\{A_{S_1} \leq \theta_{S_1} \wedge A_{S_2} \leq \theta_{S_2}\} &= \Phi_2(\theta_{S_1}, \theta_{S_2}, r_{S_1S_2}) \\ &= \Phi_2(\Phi^{-1}(\hat{m}_{S_1}), \Phi^{-1}(\hat{m}_{S_2}), r_{S_1S_2}). \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

となる. Φ_2 は 2 変量標準正規分布の累積分布関数である. また, $r_{S_1S_2} \neq \hat{r}_{S_1S_2}$ である.

(2.2.7), (2.2.9) より,

$$\Phi_2(\Phi^{-1}(\hat{m}_{S_1}), \Phi^{-1}(\hat{m}_{S_2}), r_{S_1S_2}) = \hat{r}_{S_1S_2} \cdot \hat{\sigma}_{S_1} \cdot \hat{\sigma}_{S_2} + \hat{m}_{S_1} \cdot \hat{m}_{S_2}. \quad (2.2.10)$$

が得られ, (2.2.10) を $r_{S_1S_2}$ に関する非線形方程式として数値的に解けば,

$$\text{Cor}(A_{S_1}, A_{S_2}) = r_{S_1S_2}. \quad (2.2.11)$$

を求めることができる.

Z_{S_1} と Z_{S_2} の相関係数を $\lambda_{S_1S_2}$ とすると, (2.2.1) より

$$\text{Cor}(A_{S_1}, A_{S_2}) = \sqrt{q_{S_1}} \cdot \sqrt{q_{S_2}} \cdot \text{Cor}(Z_{S_1}, Z_{S_2}) = \sqrt{q_{S_1}} \cdot \sqrt{q_{S_2}} \cdot \lambda_{S_1S_2}.$$

となる. これより, 2 セクター間の相関は

$$\lambda_{S_1S_2} = \frac{r_{S_1S_2}}{\sqrt{q_{S_1}} \cdot \sqrt{q_{S_2}}}.$$

を順次解くことで求めることができる.

産業セクター	銀行	資本財	消費財	エネルギー 環境	保険 不動産 金融	メディア	流通	政府関連	ハイテク	運輸	インフラ
銀行	1.00	0.60	0.73	0.02	0.02	0.81	0.54	0.66	0.21	0.33	0.55
資本財	0.60	1.00	0.86	0.48	-0.18	0.61	0.72	0.39	0.70	0.34	0.60
消費財	0.73	0.86	1.00	0.27	0.04	0.62	0.71	0.47	0.51	0.35	0.57
エネルギー&環境	0.02	0.48	0.27	1.00	-0.41	0.10	0.02	-0.10	0.42	0.12	0.40
保険・不動産・金融	0.02	-0.18	0.04	-0.41	1.00	-0.15	-0.34	0.31	0.02	0.91	-0.34
放送・出版など メディア関連	0.81	0.61	0.62	0.10	-0.15	1.00	0.50	0.63	0.45	0.13	0.57
小売・卸売など 流通	0.54	0.72	0.71	0.02	-0.34	0.50	1.00	-0.32	0.55	0.35	0.54
政府関連機関	0.66	0.39	0.47	-0.10	0.31	0.63	-0.32	1.00	0.06	0.06	-0.07
ハイテク産業	0.21	0.70	0.51	0.42	0.02	0.45	0.55	0.06	1.00	-0.10	0.59
運輸	0.33	0.34	0.35	0.12	0.91	0.13	0.35	0.06	-0.10	1.00	0.35
社会インフラ	0.55	0.60	0.57	0.40	-0.34	0.57	0.54	-0.07	0.59	0.35	1.00

表 2.2.2 産業セクターの相関行列 $\lambda_{s_i s_j}$

2.3 ミクロ構造のデフォルト相関のモデル化

(2.1.2) はファクター V を通して業種などマクロ構造のデフォルト相関を反映している。しかし、これは各債務者レベルでのデフォルト相関（ミクロ構造のデフォルト相関）を反映していない。Egloff, Leippold, and Vanini (2004, 2007) では、(2.1.2) のファクター ϵ をミクロ構造のデフォルト相関を示す関係式に置換することによって、マクロ構造とミクロ構造のデフォルト相関の両方を組み入れたモデルを提案した。ミクロ構造のデフォルト相関は次式で定義されるグラフ g で記述される。

$$g = (C, \mathcal{E}, \Xi, \eta). \quad (2.3.1)$$

(2.3.1) の $C = \{1, \dots, N\}$ は各債務者に影響を与えうるカウンターパーティの集合を表している。本論文ではカウンターパーティは与信ポートフォリオ内の債務者に限定する。

$$\mathcal{E} = \{m_{i,j} | i, j \in C\}. \quad (2.3.2)$$

はカウンターパーティ間に形成される依存関係の集合を表しており、関係の強さは集合

$$\Xi = \{\xi_{i,j} | i, j \in C\}. \quad (2.3.3)$$

で表わされる。 $\xi_{i,j}$ は債務者 j から i への影響力で、これに対して次の仮定が置かれている。

$$\text{I. } 0 \leq \xi_{i,j} \leq 1.$$

II. 十分に大きい影響力が認められない場合、 $\xi_{i,j}$ はゼロと見なす。

$$\text{III. } (\xi_{i,i})_{i=1, \dots, N} = 0.$$

残りの集合 η は各債務者の全信用力の内、カウンターパーティから影響を受けない部分の集合を表している。

$$\eta = \{\eta_i | i \in \mathcal{C}\}. \quad (2.3.4)$$

Egloff, Leippold, and Vanini (2004, 2007) では η を債務者固有のリスク要因のうち他の債務者からの影響を受けなかった割合と定義し、以上の Ξ および η をそれぞれ “ビジネス行列”, “残余ベクトル” と呼んでいる。ミクロ構造の依存関係 \mathcal{G} を (2.1.2) に組込むためには、右辺第2項の ϵ を

$$\epsilon(\mathcal{G}, V, \epsilon) = \Xi A + D(\eta)\epsilon. \quad (2.3.5)$$

に置換している。これによって以下の関係式が得られる。

$$\begin{aligned} A &= D_V D(\sqrt{\rho})V + D_\epsilon D(\sqrt{1-\rho})\epsilon(\mathcal{G}, V, \epsilon) \\ &= D_V D(\sqrt{\rho})V + D_\epsilon D(\sqrt{1-\rho})(\Xi A + D(\eta)\epsilon). \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

(2.3.6) の D_V 及び D_ϵ は (2.1.2) までに定義されたファクター・モデルの条件

$$(C1) \quad \text{Cov}(A, A) = 1.$$

$$(C2) \quad \text{Cov}(\epsilon(\mathcal{G}, V, \epsilon), \epsilon(\mathcal{G}, V, \epsilon)) = 1.$$

を満たすために導入された対角行列である。

(2.3.5) 及び (2.3.6) に関して、条件 (C1) と (C2) を満たす D_V , D_ϵ は閉形解で得られないので、Egloff, Leippold, and Vanini (2004, 2007) では次式のような n 次の帰納方程式

$$\begin{aligned} A^{(n)} &= D_V^{(n)} D(\sqrt{\rho})V + D_\epsilon^{(n)} D(\sqrt{1-\rho})\epsilon^{(n)}(\mathcal{G}, V, \epsilon). \\ \epsilon^{(n)}(\mathcal{G}, V, \epsilon) &= \Xi A^{(n-1)} + D(\eta)\epsilon \quad n \geq 1. \\ \epsilon^{(0)}(\mathcal{G}, V, \epsilon) &= \epsilon \text{ かつ } D_V^{(0)} = D_\epsilon^{(0)} = 1. \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

で近似した。なお、債務者 j から i に波及する影響が再び j に返るフィードバック効果を組み入れるためには2次以上の近似を行う必要がある。3次以上の近似を行えば、 i と j とは別の k を経由したフィードバック効果も表現できる。

前節までに説明した標準的なマートン型のファクター・モデルのパラメータは、デフォルト率のヒストリカル・データを基に統計的に求めることができる。しかし、本節で詳述した Egloff, Leippold, and Vanini (2004, 2007) モデルにおける “ビジネス行列” や “残余ベクトル” の成分である ξ や η については、評価するポートフォリオの債務者間ネットワークの形状によって異なるので、各債務者間の商取引量や株式の持ち合い数などで代替する必要がある。

2.4 格付推移のモデル化

本稿では、債務者 i の将来の状態推移をデフォルトか生存かの 2 状態に限定せず、信用格付け情報を元に数個の状態（格付けまたは信用力）に推移すると考える。債務者 i の信用力は離散的な状態空間 $\chi = \{1, \dots, d\}$ で表わされるとする。状態 1 を最高格付けとし、数字が増えるにつれて格付けが下がり、状態 $d-1$ が最低格付けで、状態 d に至るとデフォルトが発生すると考える。

格付推移確率をファクター・モデルに埋め込むために、債務者 i のアセット・リターン A_i が閾値 $\theta_{a_i b_i}$ を超過すれば必ず、格付け $a_i \in \{1, \dots, a, \dots, d\}$ から $b_i \in \{1, \dots, b, \dots, d\}$ への格付推移が発生すると仮定する。ポートフォリオ内の各債務者 $(i)_{i=1, \dots, N}$ には同一の格付推移行列が適用されるとして、 θ に関しては以下の序数的な関係が存在する。

$$-\infty = \theta_{a(d+1)} \leq \theta_{a d} \leq \dots \leq \theta_{a 2} \leq \theta_{a 1} = \infty. \quad (2.4.1)$$

a 格から b 格への格付推移確率の実証データ \hat{T}_{ab} から、ファクター・モデルと整合性を有する θ_{ab} は次のように求まる。

$$\begin{aligned} \hat{T}_{ab} &= P\{A_i \in [\theta_{a(b+1)}, \theta_{ab}]\} = \Phi(\theta_{ab}) - \Phi(\theta_{a(b+1)}). \\ \Leftrightarrow \Phi(\theta_{ab}) &= \hat{T}_{ab} + \Phi(\theta_{a(b+1)}) \Leftrightarrow \theta_{ab} = \Phi^{-1}(\hat{T}_{ab} + \Phi(\theta_{a(b+1)})). \end{aligned}$$

いま、 $-\infty = \theta_{a(d+1)}$ より $\Phi(\theta_{a(d+1)}) = 0$ なので、格付推移の閾値行列は d 格への推移

$$\theta_{ad} = \Phi^{-1}(\hat{T}_{ad} + \Phi(\theta_{a(d+1)})) = \Phi^{-1}(\hat{T}_{ad}).$$

から求めて、以降推移後の格付けを順次上げていくことで帰納的に求まる。

本稿では、米国の格付機関 Moody's Investors Service がオンライン上で公開している、1983 年から 2008 年までの米国における年次平均推移率行列を使用した。なお、デフォルト時の回収率はゼロと仮定する。したがって、ある格付けを付与された債務者の期待損失率は当該格付けのデフォルト率に相当する。

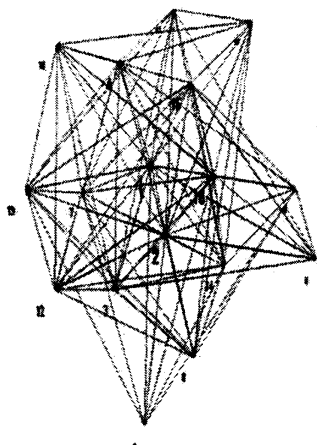
2.5 数値例

(A) サンプル・ポートフォリオ

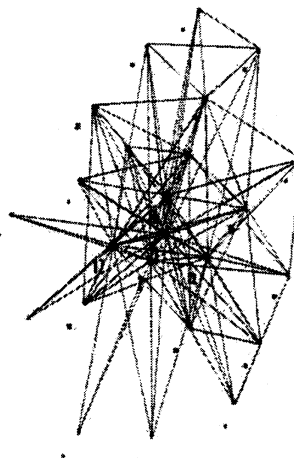
本研究では、ミクロ構造の依存関係がポートフォリオ全体の将来の損失分布に影響を及ぼす、というアイディアに注目し、債務者間ネットワーク構造の形状とポートフォリオ全体の損失分布との関係について考察を行う。考察に先立って、現実の企業間ネットワークで近似したサンプル・ポートフォリオを用いて、Egloff, Leippold, and Vanini (2004, 2007) モデルの数値例を示す。サンプル・ポートフォリオの債務者間ネットワーク構造は、本邦の代表的な企業グループである住友・三井・三菱の各グループの企業間ネットワークを用いて近似した。産業セクターの分類法は“Moody's 11”という産業分類法に従うものとし、格付け情報は Moody's 日本法人のデータを基本とした。企業間ネットワークは資本関係のみに注目し、商取引の有無は考慮しない。

擬似ネットワークを構築するにあたって、データの入手制限があったので以下の仮定を置いた。

- i. 企業間に資本関係が存在する場合、関係の強度は全企業で均一である。
 - ii. 企業間の資本関係の情報は、有価証券報告書の「大株主」、財務諸表の「(所有) 有価証券明細表」、「短・長期借入金」の各項目に集約されている。
 - iii. 有価証券報告書に未記載の資本関係は、無視できるほど微小なものとする。
- 各グループの擬似ネットワークは以下のとおり。



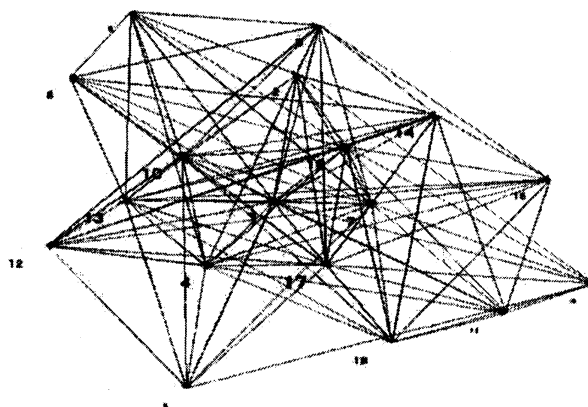
Sumitomo



Sanwa

図 2.5.1 住友グループ資本関係ネットワーク

図 2.5.2 三井グループ資本関係ネットワーク



Dai-ichi Kangyo Bank

図 2.5.3 三菱グループ資本関係ネットワーク

(B) シミュレーション

本研究では以下の手順に従って、モンテカルロ法を用いたシミュレーションを行った。

- ①ポートフォリオの各債務者に格付けを付与する。
- ②ポートフォリオへの総出資額が1になるように、各債務者への出資額を割り振る。
- ③これまでに求めたパラメータを(2.3.7)に導入し、各債券のアセット・リターンを求める。
- ④アセット・リターンを格付推移の閾値行列に適用して、格付推移を発生させる。
- ⑤推移後格付けのデフォルト率を当該債務者の期待損失率とする。
- ⑥各債務者の期待損失率を足してポートフォリオの推移後損失率を求める
- ⑦③から⑤を必要回数繰り返してポートフォリオの損失分布を求める。

次節以降の分析では、パス数をいずれも10万に設定した。

(C) 計算結果

サンプル・ポートフォリオの損失分布を求めるにあたって、ミクロ構造の依存関係を考慮する場合と考慮しない場合に分けてシミュレーションを行った。各サンプル・ポートフォリオの特徴を理解するために、損失分布の基本統計量、および信用リスクのリスク指標となる信用 VaR と条件付き VaR (CVaR) をそれぞれの信頼水準を 95%, 99% として求めた。なお、信用 VaR と CVaR は以下のように定義した。

$$100 \cdot \alpha\% \text{の信用 VaR} \equiv \text{VaR}^\alpha = \inf\{x \in \mathbb{R} | P\{X \leq x\} \geq \alpha\} \quad (100\alpha\text{-パーセンタイル})$$

$$100 \cdot \alpha\% \text{の CVaR} \equiv \text{CVaR}^\alpha = E[X \cdot 1_{\{X \geq \text{VaR}^\alpha\}}] \quad (\text{VaR}^\alpha \text{以上損失額の期待値})$$

※X はポートフォリオの損失額を表す確率変数

※ $1_{\{X \geq \text{VaR}^\alpha\}}$ は $X \geq \text{VaR}^\alpha$ が真なら 1, 偽なら 0 を取る

財閥型ポートフォリオ	住友		三井		三菱	
ミクロ相関の有無	有	無	有	無	有	無
初期期待損失額	0.0014	0.0014	0.0020	0.0020	0.0039	0.0039
推移後期待損失額	0.0033	0.0033	0.0048	0.0048	0.0082	0.0082
標準偏差	0.0121	0.0093	0.0103	0.0098	0.0180	0.0148
歪度	2.3511E-05	5.2310E-06	5.6976E-06	4.3898E-06	4.0451E-05	1.2020E-05
尖度	-3.0000	-3.0000	-3.0000	-3.0000	-3.0000	-3.0000
95%信用VaR	0.0060	0.0063	0.0078	0.0119	0.0574	0.0595
99%信用VaR	0.0613	0.0603	0.0472	0.0462	0.0696	0.0614
95%CVaR	0.0364	0.0343	0.0460	0.0451	0.0725	0.0628
99%CVaR	0.0918	0.0659	0.0651	0.0586	0.1235	0.0789

表 2.5.1 財閥型ポートフォリオの比較；ミクロ相関の有無

表 2.5.1 より、ミクロ相関の有無は損失額には影響を与えないことがわかる。一方、標準偏差および信用 VaR, CVaR は異なる値を取っているため、これら指標は債務者間ネットワークの構造に依存していることがわかる。そこで各サンプル・ポートフォリオ別に、ミクロ相関の有無による乖離率と、ネットワーク全体の構造的特徴を示す値であるネットワーク密度をまとめて表 2.5.2 を得た。なお、乖離率は $(\alpha^{(\text{micro+macro})} - \alpha^{(\text{macro})}) / \alpha^{(\text{macro})}$ (α は各指標) とし、全企業の初期格付けはすべて低格付け (Caa2 格) に統一した。ネットワーク密度 d とは、ネットワークに張る

ことができる全てのエッジ数に対する、実際のエッジ数の比率であり、ノード（頂点）の数を N 、エッジ（辺）の数を m とすると、以下のように定義される。

$$d \equiv \frac{m}{N(N-1)}, \quad 0 \leq m \leq N(N-1). \quad (2.5.1)$$

低格付ポートフォリオ	三井	住友	三菱
標準偏差乖離率	37.552%	82.029%	95.161%
95%信用VaR乖離率	16.342%	42.647%	45.706%
99%信用VaR乖離率	16.754%	36.282%	43.220%
95%CVaR乖離率	17.180%	38.646%	45.064%
99%CVaR乖離率	17.223%	32.975%	37.899%
ネットワーク密度	0.2808	0.4890	0.5490

表 2.5.2 財閥型ポートフォリオ（低信用力）の比較；ネットワーク密度

表 2.5.2 ではどの指標もネットワーク密度と序数的に同等な関係であることが確認できる。これより、ネットワーク構造がポートフォリオの非期待損失に大きな影響を及ぼすことが推察される。同様の結果は下図からも確認できる。なお、下図で分布図が多峰状になっているのは、格付けが離散情報であることによる。

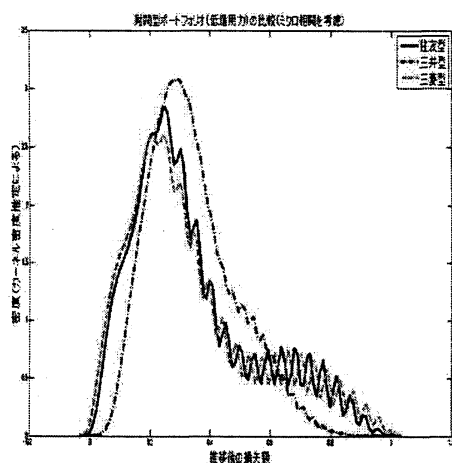


図 2.5.4 ネットワーク構造を考慮

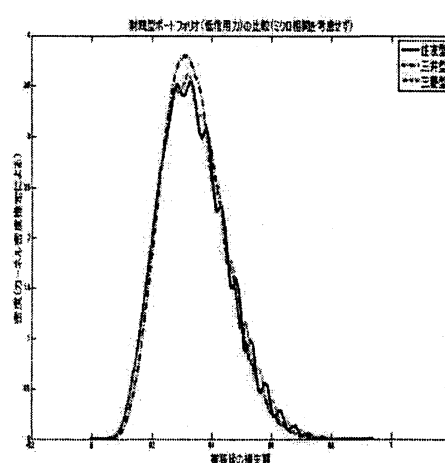


図 2.5.5 ネットワーク構造を考慮せず

第3節 信用集中リスクの分析

第2節でネットワーク全体の構造的特徴を示す値としてネットワーク密度という指標を導入した。しかし債務者間ネットワークが大きくなると、ネットワーク密度はネットワーク全体の構造を適切に表現できない。第3節では、ネットワーク密度を一般化した値を各債務者間の結び付きの強さに置き換え、ネットワーク構造とポートフォリオ全体の損失分布との関係について考察を行う。

3.1 信用集中度

(2.5.1)で導入したネットワーク密度は、エッジ数の増分が局所的であっても全体的な密度増加と捉えてしまうことがある。さらに、ネットワーク密度はエッジやノードの重みを反映することができない。一方、与信ポートフォリオを構成する債務者間ネットワークは、各債務者間の関係性の強度（エッジの重み）が異なる。また各債務者への出資比率（ノードの重み）も異なる。したがって、与信ポートフォリオを構成する債務者間ネットワークの構造的特徴を示す指標として、ネットワーク密度をそのまま導入することは適切ではない。

そこで本稿では債務者間ネットワークの構造に起因するデフォルト相関を“信用集中リスク”と定義し、債務者間ネットワーク全体に作用する相関の尺度として“信用集中度” π を導入する。

(A) 信用集中度の仮定

ポートフォリオを構成する各債務者間の関係性の強度（マイクロ相関の強さ） $(\xi_{ij})_{i,j=1,\dots,N}$ および各債務者への出資比率（与信の偏在性） $(\gamma_i)_{i=1,\dots,N}$ は一様ではない。そこで本研究では、マイクロ相関の強度および与信の偏在性を反映する尺度として、信用集中度 π を定義する。定義に当たっては、以下の仮定を置く。

仮定Ⅰ：各債務者には取引相手があり、それは与信ポートフォリオ内の取引相手とそれ以外の取引相手に二分される。

仮定Ⅱ：各債務者への与信額はすべて取引相手との取引に給される。

仮定Ⅲ：与信ポートフォリオ内の債務者 i と債務者 j との間の関係性の強度は $(\xi_{ij})_{i,j=1,\dots,N; i \neq j}$ 、ポートフォリオ外の取引相手との関係性の強度（マイクロ相関）は $(\xi_{ii})_{i=1,\dots,N}$ で表される。

仮定Ⅳ：各債務者への出資比率は $(\gamma_i)_{i=1,\dots,N}$ で表される。

仮定Ⅴ：各債務者のマイクロ相関と出資比率の積和の合計は 1 に等しい

(B) 信用集中度の定義

本研究では、与信ポートフォリオのネットワーク構造と損失分布との関係について考察を行う。したがって、債務者間ネットワークの取引のみに着目し、この総和を信用集中度と定義する。

$$\begin{aligned}
 \pi &\equiv \sum_{j=1}^N \sum_{i \neq j}^N \gamma_i \cdot \xi_{ij} \\
 &= \sum_{j=1}^N \left\{ \left(\sum_{i=1}^N \gamma_i \cdot \xi_{ij} \right) - \gamma_j \cdot \xi_{jj} \right\} = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N \gamma_i \cdot \xi_{ij} - \sum_{j=1}^N \gamma_j \cdot \xi_{jj} \\
 &= 1 - \sum_{j=1}^N \gamma_j \cdot \xi_{jj} \tag{3.1.1}
 \end{aligned}$$

ただし、 $0 \leq \gamma \leq 1$, $\sum_{j=1}^N \gamma_j = 1$, $0 \leq \xi \leq 1$, N : 債務者数の総数

仮定より $0 \leq \sum_{j=1}^N \gamma_j \cdot \xi_{jj} \leq 1$ であるから $0 \leq \pi \leq 1$ で、 π が 0 のとき債務者は与信ポートフォリオ外の取引相手とのみ取引しており、1 のときはポートフォリオ内の相手とのみ取引を行っている。

3.2 分析

(A) サンプル・ポートフォリオ

第3節ではポートフォリオの損失分布と債務者間ネットワークの構造との関係に焦点を絞って分析を行う。よって、ここで分析対象とするサンプル・ポートフォリオの債務者間ネットワークは以下の条件の下で構築される。

- ・ネットワークは重み付きの隣接行列で生成する。
- ・各債務者間の依存関係の有無を表す隣接行列は、ベルヌーイ分布に従う乱数行列を基に構築。
- ・依存関係の強さは、 $[0, 1]$ 上の一様分布に従って割り振る。
- ・各債務者への与信額の割当は、与信の偏在性の強さ別に3パターン考える（強・中・弱）。
- ・各債務者に対して割り当てる格付けは、事前に決めたポートフォリオ全体の信用力に従う。
e.g. 信用力が高いポートフォリオは高格付け債務者が多く低格付け債務者は少ない。

さらにサンプル・ポートフォリオを構成する債務者については、債務者数が60人、10人ずつ6つの産業セクター（Moody's 11に従う）に分類する（銀行・資本財・消費財・メディア関連・流通・ハイテク関連）。なお、データはMoody's Investors Serviceのウェブサイトより取得した。

(B) 信用集中度を用いた分析

第3節でも第2節と同様の手順に従うシミュレーションを行った。(3.1.1)より、信用集中度は債務者間の依存関係と与信の偏在性の程度によって決まることがわかる。したがって分析にあたっては、債務者間の依存関係と与信の偏在性をそれぞれ固定して、信用集中度と与信ポートフォリオの損失分布との関係を考察する。

まず、与信の偏在性を固定し、債務者間の依存関係と損失分布との関係について見る。

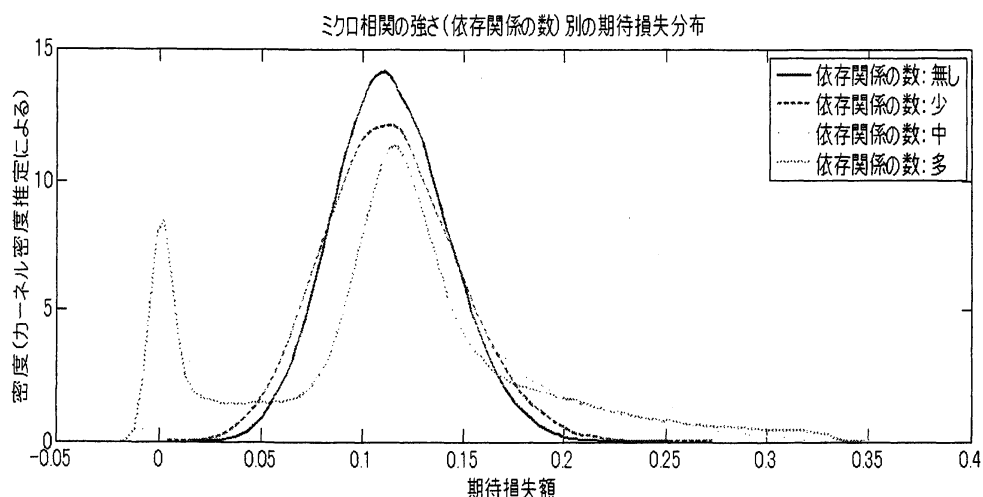


図 3.2.1 依存関係の強さと期待損失分布との関係

次に、債務者間の依存関係の強さを固定し、与信の偏在性と損失分布との関係について見る。

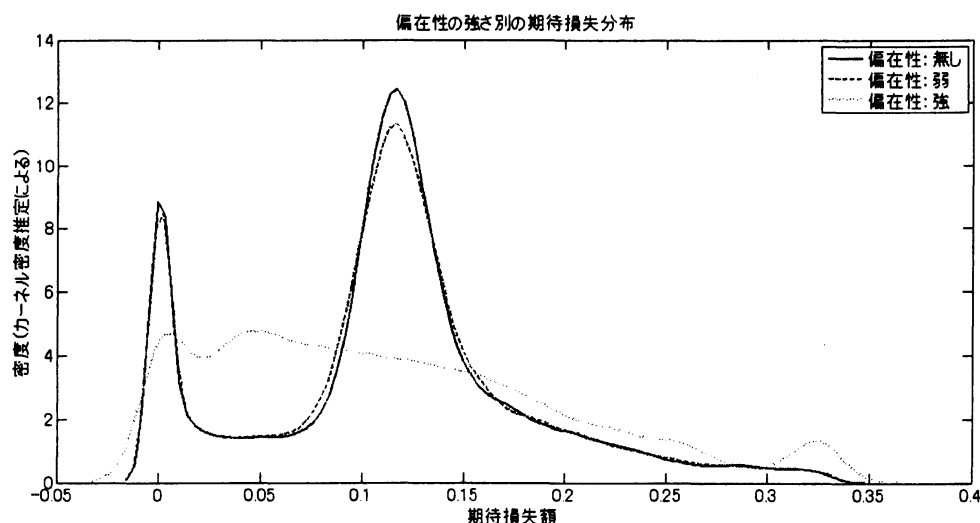


図 3.2.2 与信の偏在性と期待損失分布との関係

上の図より、マイクロ相関が強くなるほど、また偏在性が増すほど期待損失額の分布の裾が厚くなることが確認できる。なお、損失分布図のゼロの近傍で峰ができている理由は、損失額はゼロよりも小さくならない、という格付け情報の非対称性による。

では、本研究において導入した信用集中度が上図での結果と整合的かどうかを確認するために、各統計量と信用集中度との関係を表で示す。

債務者間の依存関係 与信の偏在性	債務者間の依存関係				与信の偏在性		
	無し	少	中	多	無し	弱	強
期待損失額	0.1142	0.1143	0.1144	0.1145	0.1145	0.1145	0.1148
標準偏差	0.0282	0.0328	0.059	0.0694	0.0689	0.0694	0.0862
歪度	0	0	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0004
尖度	-3	-3	-3	-2.9999	-2.9999	-2.9999	-2.9998
95%信用VaR	0.113	0.113	0.1132	0.1157	0.1161	0.1157	0.1014
99%信用VaR	0.1159	0.1163	0.1177	0.1191	0.119	0.1191	0.1113
95%CVaR	0.1367	0.1405	0.1596	0.1648	0.164	0.1648	0.1847
99%CVaR	0.1387	0.1427	0.1635	0.169	0.168	0.169	0.1915
信用集中度	0	0.337	0.9557	0.9777	0.9825	0.9777	0.7081

表 3.2.1 信用集中度と各種統計量

上の表より、債務者間の依存関係が増えるほど、すなわち与信ポートフォリオ内での取引が増えるほど信用 VaR と CVaR とともに大きくなり、また信用集中度も序数的に等しい関係であることが確認できる。

一方、与信の偏在性では、与信の偏在性が増すほど CVaR は大きくなるが信用 VaR は減少傾向にある。信用 VaR は信頼水準を引き上げるほど不安定になるため、このような結果が出たと推察

される。また信用集中度も偏在性および CVaR が増加する一方で明らかな減少傾向がある。与信の偏在性が増すほど一部の債務者がポートフォリオ内での総取引量の多寡に与える影響が大きくなり、その分ポートフォリオ内取引量が大幅に減少する可能性も大きくなる。これにより上記の結果となったと推察される。

したがって、(3.1.1)でポートフォリオ内総取引量と同値であると定義した信用集中度は、債務者間の依存関係および与信の偏在性の強さと、与信ポートフォリオの期待損失分布との関係性を無矛盾で説明できる尺度としては不備があることが分かった。しかしながら、与信の偏在性が一定であるという仮定を置けば、例えば多数の小口債務者からなる非常によく分散された与信ポートフォリオの集中リスクを評価する際には有効な尺度である。

本研究では、債務者間の依存関係および与信の偏在性はともに与信ポートフォリオの期待損失分布の形状に影響を及ぼすという結論を得た。しかしながら、これらすべての関係を整合的に表現し得るリスク尺度を導出することはできなかった。この導出は今後の研究課題とする。

参考文献

- [1] 日本格付投資情報センター、『格付けの知識』, 日本経済新聞社 (日経文庫), 1998 年.
- [2] 橋本崇, 「与信ポートフォリオの信用リスク計量における資産相関について—本邦のデフォルト実績データを用いた実証分析—」, 日本銀行ワーキングペーパーシリーズ, No.08-J-10, 2008 年.
- [3] 肥後秀明, 「不均一な与信ポートフォリオのリスク計量におけるモンテカルロ・シミュレーションの効率化」, 日本銀行ワーキングペーパーシリーズ, No.06-J-18, 2006 年.
- [4] 室町幸雄, 『信用リスク計測と CDO の価格付け』, 朝倉書店, 2007 年.
- [5] D. Barro and A. Basso, “Counterparty risk: a credit contagion model for a bank loan portfolio,” *Working Paper*, SSRN: <http://ssrn.com/abstract=724887>, 2005.
- [6] D. Barro and A. Basso, “A network of business relations to model counterparty risk,” *Working Paper*, Department of Applied Mathematics, University of Venice No.171 <http://ideas.repec.org/p/vnm/wpaper/171.html>, 2008.
- [7] F. Black and M. Scholes, “The Pricing of Options and Corporate Liabilities,” *Journal of Political Economy*, **81**, 1973, 637-654.
- [8] C. Bluhm and L. Overbeck, *Structured Credit Portfolio Analysis, Baskets & CDOs*. Chapman & Hall/CRC Financial Mathematics Series. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2007.
- [9] M. Davis and V. Lo, “Infectious defaults,” *Quantitative Finance*, **1**, 2001, 382-387.
- [10] D. Duffie and K. J. Singleton, *Credit Risk: Pricing, Measurement and Management*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2003. (本多俊毅, 上村昌司 訳, 『クレジットリスク —評価・計測・管理—』, 共立出版, 2009 年.)
- [11] D. Egloff, M. Leippold, and P. Vanini, “A simple model of credit contagion,” *Technical Report*, NCCR Working Paper No.141, University of Zurich, 2004.

- [12] D. Egloff, M. Leippold, and P. Vanini, "A simple model of credit contagion," *Journal of Banking & Finance*, **31**, 2007, 2475-2492.
- [13] R. C. Merton, "On the pricing of corporate debt: The risk structure of interest rates," *Journal of Finance*, **29**, 1974, 449-470.
- [14] D. Rösch and B. Winterfeldt, "Estimating Credit Contagion in a Standard Factor Model," *Working Paper*, http://www.wiwi.uni-regensburg.de/hamerle/mitarbeiter/assistenten/roesch/CreditContagion_20070130.pdf, 2007
- [15] D. Rullière and D. Dorobantu, "An extension of Davis and Lo's contagion model," *Working Paper*, Cornell University Library, <http://arxiv.org/abs/0904.1653>, 2009.
- [16] Moody's Investors Service; <http://www.moody.com/>.